Grundwissen 11. Klasse

1. Spezielle Eigenschaften von Funktionen

a) Grenzwerte von Funktionen

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für $x \to +\infty$ einer Zahl $g \in \mathbb{R}$, so heißt g *Grenzwert* von f für $x \to +\infty$. Analoges gilt für $x \to -\infty$.

Funktionen, die für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ einen Grenzwert besitzen, bezeichnet man dort als *konvergent*. Besitzen sie keinen Grenzwert, bezeichnet man sie dort als *divergent*.

b) Symmetrie von Funktionsgraphen

Der Graph einer Funktion f ist genau dann…

… *achsensymmetrisch zur y-Achse*, wenn $f(-x) = f(x)$, für alle $x \in \mathbb{D}$

… *punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung*, wenn $f(-x) = -f(x)$, für alle $x \in \mathbb{D}$.

c) Verschieben, Strecken und Spiegeln

$g(x) = a \cdot f\big(b(x+c)\big) + d$ → Der Graph von f wird …

→ in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$ gestreckt.

Falls $a < 0$, wird er zudem an der x-Achse gespiegelt.

→ in x-Richtung mit dem Faktor $\left|\frac{1}{b}\right|$ gestreckt.

Falls $b < 0$, wird er zudem an der y-Achse gespiegelt

→ um $-c$ in x-Richtung verschoben.

→um d in y-Richtung verschoben.

d) Stetigkeit von Funktionen

Ist eine Funktion f in einem Intervall definiert und kann ihr Graph auf diesem Intervall, ohne abzusetzen, durchgezeichnet werden, so nennt man f auf dem Intervall *stetig*.

Macht der Graph einer Funktion g an einer Stelle der Definitionsmenge einen „*Sprung*", so nennt man die Funktion an dieser Stelle *unstetig*.

2. Gebrochen-rationale Funktionen

Form: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x)$ mind. Grad 1 hat.
Nullstellen: $p(x) = 0$

Definitionslücken: $q(x) = 0$ → $\mathbb{D}$ bestimmen

Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ → Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Ist Z der Grad von $p(x)$ und N der Grad von $q(x)$, dann gilt:

- Ist $Z < N$, konvergiert f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0 → G_f hat die waagerechte Asymptote $y = 0$
- Ist $Z = N$, konvergiert f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen einen festen Wert $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ → G_f hat die waagerechte Asymptote $y = c$
- Ist $Z = N + 1$, divergiert f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ → G_f hat schräge Asymptote mit Gleichung $y = mx + t$

Verhalten an den Polstellen

Strebt $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke x_0 gegen $\pm\infty$, nennt man x_0 *Polstelle* von f. Der Graph hat bei x_0 eine *senkrechte Asymptote*.

→ Unterscheidung zwischen Polstelle mit und ohne Vorzeichenwechsel

Algebraische Betrachtung: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

3. Stochastik

Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der *bedingten Wahrscheinlichkeit* $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

Es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}$

Zwei Ereignisse A und B heißen *stochastisch unabhängig*, wenn $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ gilt. Andernfalls nennt man A und B stochastisch abhängig.

4. Lokales und globales Differenzieren

a) Mittlere und Momentane Änderungsrate

Funktion f, und $a, b \in \mathbb{D}$ → $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Differenzenquotient und sein Wert *mittlere Änderungsrate* von f im Intervall $[a; b]$.

Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ der mittleren Änderungsrate, dann heißt er *Differentialquotient* von f an der Stelle x_0 und sein Wert *momentane Änderungsrate*. Man bezeichnet den Grenzwert auch als *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und schreibt $f'(x_0)$.

Existiert der Differentialquotient für eine Funktion f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. (links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten sind gleich!)

b) Ableitungsfunktion

Ist eine Funktion in ihrer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ differenzierbar, so heißt die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{D}$ den Wert der Ableitung $f'(x)$ zuordnet, *Ableitungsfunktion* f' von f.

Ableitungsregeln:

Potenzregel: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ → $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann gilt:

Faktorregel $f(x) = k \cdot u(x), k \in \mathbb{R}$ → $f'(x) = k \cdot u'(x)$

Summenregel $f(x) = u(x) + v(x)$ → $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Konstantenregel $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ → $f'(x) = 0$

5. Anwendungen der Differentialrechnung

Tangentengleichung und Steigungswinkel

Bestimmung der *Tangentengleichung* $y = mx + t$ am Graphen von f im Punkt $P\big(x_0\big|f(x_0)\big)$

1. Tangentensteigung bestimmen: $m = f'(x_0)$
2. m und P in die Tangentengleichung einsetzen → nach t auflösen.
3. Tangentengleichung angeben

Für den *Steigungswinkel* α dieser Tangente gilt: $\tan(\alpha) = f'(x_0) = m$

1. Ableitung: Monotonie

Wenn in einem Intervall I für alle x-Werte gilt:

$f'(x) > 0$, dann ist f *streng monoton zunehmend* bzw. G_f *streng monoton steigend* in I

$f'(x) < 0$, dann ist f *streng monoton abnehmend* bzw. G_f *streng monoton fallend* in I

2. Ableitung: Krümmung

Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f'(x)$ streng monoton zunehmend in I und der Graph von f in I *linksgekrümmt*.

Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f'(x)$ streng monoton abnehmend in I und der Graph von f in I *rechtsgekrümmt*.

Kriterien für Extremstellen:

Die Funktion f hat ein *lokales* *Maximum* an der Stelle x_0 , wenn…

$f'(x_0) = 0$ und f' bei x_0 einen VZW von + nach – hat, oder

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ gilt.

→ Dann hat G_f einen *Hochpunkt* bei $H(x_0|f(x_0))$.

Die Funktion f hat ein *lokales* *Minimum* an der Stelle x_0 , wenn…

$f'(x_0) = 0$ und f' bei x_0 einen VZW von $-$ nach $+$ hat, oder

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ gilt.

→ Dann hat G_f einen *Tiefpunkt* bei $T\big(x_0\big|f(x_0)\big)$.

Wendestellen und Wendepunkte

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 eine *Wendestelle*,

wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen VZW hat oder

wenn $f''(x_0) = 0$ gilt und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.

→ Dann hat G_f den *Wendepunkt* $W\big(x_0\big|f(x_0)\big)$ → G_f ändert Krümmungsverhalten

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt *Terrassenpunkt*.

Newtonverfahren

→ näherungsweise Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion f

Man wählt einen geeigneten Näherungswert als Startwert x_0 und berechnet weiteren Näherungswert für die Nullstelle mit:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f'(x_n) \neq 0$